

Алгоритм построения и решения уравнения равновесия трехмерных упругих тел

Саттаров Ахат

Университет мировой экономики и дипломатии

Citation: Sattarov A. Algorithm for constructing and solving the equilibrium equation of three-dimensional elastic bodies. Acta Education (2024) 1(2) 15–21. <https://doi.org/10.61587/3030-3141-2024-1-2-13-18>

Corresponding authors:
Sattarov A. s-akhat@mail.ru

Аннотация. Современные требования к элементам трехмерных пространственных призматических конструкций требуют высокого уровня точных расчетов при определении прочности элементов. Поэтому расчет задач в этой области в трехмерном пространстве требует учета не только упругой деформации, но во многих случаях и пластической деформации.

Ключевые слова: Алгоритм, модель, упругость, пластичность, визуализация, уравнения, дифференциал.

Algorithm for constructing and solving the equilibrium equation of three-dimensional elastic bodies

Sattarov Akhat

University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. Modern requirements for elements of three-dimensional spatial prismatic structures require a high level of accurate calculations when determining the strength of elements. Therefore, the calculation of problems in this area in three-dimensional space requires taking into account not only elastic deformation, but in many cases also plastic deformation.

Keywords: Algorithm, model, elasticity, plasticity, visualization, equations, differential.

Funding source for publication: Tashkent International University of Education.

Publisher's Note: ActaEducation stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2023 by the authors. Licensee ActaEducation, Tashkent, Uzbekistan. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY-NC-ND) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Введение

Большой успех при исследовании физически нелинейных задач достигнут с помощью метода упругих решений А.А. Ильюшина на основе теории малых упругопластических деформаций [1].

На основе этого метода решение упруго-пластической задач строится по методу последовательных приближений: на каждом шаге решается упругая задача, то есть нелинейная задача сводится к последовательности линейных граничных задач с уточняемыми в каждом приближении величинами пластических деформаций. На каждом шаге приближении основное уравнение определяется величиной пластической деформации, действующей как объемными,

так и поверхностными силами.

Обзор литературы

Трехмерная постановка задачи требует создания очень сложных алгоритмов решения даже для упругих задач. Ученики А.А. Ильюшина использовали этот метод и занимались его модификациями [2,3]. Узбекские ученые также внесли значительный вклад в эту область. Академик В.К. Кабулов [4,5] и его ученики проводили ряд научных работ по созданию алгоритмов решения трехмерных задач теории упругости и пластичности.

В 1970-1980 годы крупные ЭВМ и их возможности ограничивали возможности решения сложных задач. Очень небольшое количество ЭВМ (например,

единственная в Узбекистане машина БЭСМ-6 находится только в Институте кибернетики АН УзССР), ограниченность машинного времени, ограниченные математические и технические возможности машин привели к затягиванию процесса решения проблем. Почти все программы были написаны на языке программирования Алгол-60, который имел ограниченные языковые возможности и очень скудную программную библиотеку, что, в свою очередь, требовало перепрограммирования задачи. В результате драгоценное время ЭВМ было потрачено не на вычисления, а на отладку программ. На реализацию некоторых программ даже уходили месяцы и годы. Обработка полученных данных и принятие необходимых выводов производился вручную. Поскольку существующие ЭВМ не имели возможности представлять информацию графически, то есть визуализировать ее, это создавало большие трудности для исследователей. Появление современных компьютеров позволило устранить вышеуказанные недостатки.

Методология

В данной статье создана математическая модель определения состояния равновесия трехмерных упругих призматических тел. Используя технические и программные возможности современных компьютеров, важно создать автоматизированную единую схему расчета для решения трехмерных упругих задач. При построении схемы расчета использован метод Власова-Канторовича. С помощью этого метода уравнения в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты и обсуждение

На основе метода Власова-Канторовича решение трехмерного уравнения Ляме в упругом состоянии выражается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0(x, y, z) + \sum_{mn} U_{mn}(z) f_{mn}^{(1)}(x, y) \\ V &= V_0(x, y, z) + \sum_{mn} V_{mn}(z) f_{mn}^{(2)}(x, y) \\ W &= W_0(x, y, z) + \sum_{mn} W_{mn}(z) f_{mn}^{(3)}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$m, n = 1, 2, 3, \dots$

где U_0, V_0, W_0 – заданные функции координат, которые можно построить на основе элементарной теории и не содержат произвольных постоянных; $f_{mn}^{(1)}, f_{mn}^{(2)}, f_{mn}^{(3)}$ – являются координатными функциями и предварительно выбираются на основе граничных условий; U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} – обобщенные перемещения тела, являющиеся искомыми функциями. Функции $f_{mn}^{(1)}, f_{mn}^{(2)}, f_{mn}^{(3)}$ – должны удовлетворять условиям полноты [6,7,10,11] и полностью или частично граничным условиям, наложенным на боковых поверхностях призматического тела.

Построение уравнения равновесия упругих призматических тел.

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задано призматическое тело постоянного сечения. Предположим, что его стороны параллельны оси Oz , его объем равен V , стороны ограничены поверхностью Σ , и он находится в равновесии (рис. 1.1).

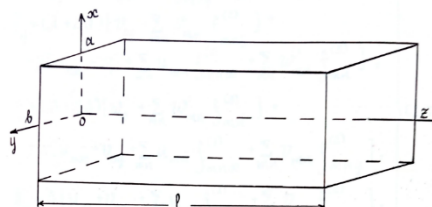


Рис. 1.1

Предположим, что на части поверхности заданы поверхностные силы, а на части поверхности – перемещения. Сообщим точкам тела бесконечно малые перемещения $\delta U, \delta V, \delta W$ совместимые с краевым условиям, которые примем за возможные.

Исходя из принципов возможного перемещения, для деформируемого тела необходимым и достаточным условиям равновесия является равенство работ внутренних и внешних сил на возможных перемещениях:

$$\int_V [X \delta U + Y \delta V + Z \delta W] \rho dV + \int_{\Sigma} [X_\gamma \delta U + Y_\gamma \delta V + Z_\gamma \delta W] d\Sigma =$$

$$= \int_V [X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx}] dV \quad (2)$$

Здесь: ρ - удельная плотность массы; X, Y, Z - составляющие объемных сил; $X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$ - составляющие сил, действующих на боковые поверхности; $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$ — компоненты тензора напряжений; $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ - компоненты тензора деформации.

Известные из теории упругости компоненты напряжений выражаются компонентами деформации следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2Ge_{xx}, X_y = Ge_{xy}, \\ Y_y &= \lambda\theta + 2Ge_{yy}, Y_z = Ge_{yz}, \\ Z_z &= \lambda\theta + 2Ge_{zz}, Z_x = Ge_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь: $G=E/[2(1+\mu)], \lambda = E\mu/[(1+\mu)(1-2\mu)]$ – Константы Ламе;

E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона;

$$e = \frac{e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}}{3} \text{ – средняя деформация}$$

$$\theta = 3e$$

На основе (1) компоненты деформаций приводится к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= U_{0x} + \sum_{mn} U_{mn} f_{mnx}^{(1)}, e_{xy} = U_{0y} + V_{0x} + \sum_{mn} U_{mn} f_{mny}^{(1)} + \sum_{mn} V_{mn} f_{mnx}^{(2)}, \\ e_{yy} &= V_{0y} + \sum_{mn} V_{mn} f_{mny}^{(2)}, e_{yz} = V'_0 + W_{0y} + \sum_{mn} V'_{mn} f_{mny}^{(2)} + \sum_{mn} W_{mn} f_{mny}^{(3)}, \\ e_{zz} &= W'_0 + \sum_{mn} W'_{mn} f_{mny}^{(3)}, e_{zx} = W_{0x} + U'_0 + \sum_{mn} W_{mn} f_{mnx}^{(3)} + \sum_{mn} U'_{mn} f_{mny}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Используя (4) также можно определить компоненты напряжений. Подставляя (1), (4) и компоненты напряжений в (2) и учитывая независимость вариаций U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} , формируем систему дифференциальных уравнений и вариационные граничные условия на торцах тела:

$$A_1 T'' - B_1 T' - C_1 T - D_1(z) = 0 \quad (5)$$

$$\left[A_2 T' + B_2 T + D_2(z) \right] \delta T \Big|_{z=0,l} \quad (6)$$

Штрихи в формулах обозначают дифференцирование по z . В (5) и (6) приняты следующие обозначения (7):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} A_{klmn}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{klmn}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{klmn}^{(3)} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{klmn}^{(1)} \\ 0 & 0 & F_{klmn}^{(2)} \\ D_{klmn}^{(3)} & F_{klmn}^{(3)} & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} C_{klmn}^{(1)} & E_{klmn}^{(1)} & 0 \\ E_{klmn}^{(2)} & C_{klmn}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{klmn}^{(3)} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} L_{klmn}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & L_{klmn}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & L_{klmn}^{(3)} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{klmn}^{(1)} \\ 0 & 0 & N_{klmn}^{(2)} \\ M_{klmn}^{(3)} & N_{klmn}^{(3)} & 0 \end{bmatrix} \\ D_1 &= \begin{bmatrix} H_{kl}^{(1)}(U_0) + I_{kl}^{(1)}(V_0) + J_{kl}^{(1)}(W_0) + K_{kl}^{(1)}(X, P) \\ H_{kl}^{(2)}(U_0) + I_{kl}^{(2)}(V_0) + J_{kl}^{(2)}(W_0) + K_{kl}^{(2)}(Y, P) \\ H_{kl}^{(3)}(U_0) + I_{kl}^{(3)}(V_0) + J_{kl}^{(3)}(W_0) + K_{kl}^{(3)}(Z, P) \end{bmatrix} \\ D_2 &= \begin{bmatrix} O_{kl}^{(1)}(U_0) + Q_{kl}^{(1)}(W_0) - R_{kl}^{(1)}(P) \\ P_{kl}^{(2)}(V_0) + Q_{kl}^{(2)}(W_0) - R_{kl}^{(2)}(P) \\ O_{kl}^{(3)}(U_0) + P_{kl}^{(3)}(V_0) + Q_{kl}^{(3)}(W_0) - R_{kl}^{(3)}(P) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Элементы матриц и векторов в (7), являющихся одно- или двукратными интегралами, зависят от координатных функций, от элементарных решений и от объемных и поверхностных нагрузок. Эти интегралы вычисляются аналитически (точно) с помощью программы MatLab [8] или с определенной точностью по формуле трапеций [9].

Построение решения уравнения равновесия призматических тел

Задавая различные граничные условия относительно перемещений и часто усилий, можно решать различные краевые задачи теории упругости. Для этой цели уравнения (5) и граничные условия (6) запишем так:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1' \\ T_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & E \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1(z) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} [\Gamma_1 + (E - \Gamma_1)B_2 & (E - \Gamma_1)A_2] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_{z=0} \\ [\Gamma_2 + (E - \Gamma_2)B_2 & (E - \Gamma_2)A_2] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}_{z=l} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (E - \Gamma_1)[D_2(0)] \\ (E - \Gamma_2)[D_2(l)] \end{bmatrix} \tag{9}$$

Здесь $T_1=T$; $T_2=T_1'$; E -единичная матрица.

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_i^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_i^{(3)} \end{bmatrix}, i = 1, 2 \text{ связанная с граничными условиями.}$$

- клеточная матрица,

$$T_1 = \begin{bmatrix} X_{kl}^{(1)}(\lambda_{mn})e^{\lambda_{mn}z} \\ X_{kl}^{(2)}(\lambda_{mn})e^{\lambda_{mn}z} \\ X_{kl}^{(3)}(\lambda_{mn})e^{\lambda_{mn}z} \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} X_{kl}^{(4)}(\lambda_{mn})e^{\lambda_{mn}z} \\ X_{kl}^{(5)}(\lambda_{mn})e^{\lambda_{mn}z} \\ X_{kl}^{(6)}(\lambda_{mn})e^{\lambda_{mn}z} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) получим:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{mn} & E \\ A_1^{-1}C_1 & A_1^{-1}B_1 - \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{kl}^{(1,2,3)} \\ X_{kl}^{(4,5,6)} \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

При $\Gamma_1=\Gamma_2=E$ задается только перемещение в сечениях $z=0$ и $z=l$ данного тела; Если $\Gamma_1=\Gamma_2=0$, к соответствующим сечениям прикладываются только внешние силы. Если в клетках Γ_1 и Γ_2 записаны 0 или E, то заданы внешние силы или перемещения в соответствующих направлениях.

Чтобы все $X_{kl}^{(1,2,3,4,5,6)}$ не обратились в ноль одновременно, собственные значения (13) должны быть корнями характеристического уравнения:

Решение уравнений (8) построим по следующей схеме: Решение уравнения (8) можно представить в виде суммы общего решения однородной части

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1' \\ T_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & E \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{mn} & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{mn} & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{mn} & 0 & 0 & E \\ c_{klmn}^{(1)} & e_{klmn}^{(1)} & 0 & -\lambda_{mn} & 0 & f_{klmn}^{(1)} \\ e_{klmn}^{(2)} & c_{klmn}^{(2)} & 0 & 0 & -\lambda_{mn} & f_{klmn}^{(2)} \\ 0 & 0 & c_{klmn}^{(3)} & d_{klmn}^{(3)} & f_{klmn}^{(3)} & -\lambda_{mn} \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

и частного решения неоднородной части. Если A_1 не является единичной матрицей, то делим ее на клетки и находим A_{-1} . Затем (10) приводим к нормальному виду:

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ T_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ A_1^{-1}C_1 & A_1^{-1}B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Систему частных решений матричного уравнения (11) ищем в следующем виде:

Здесь $X_{kl}^{(1,2,3,4,5,6)}$ являются собственными векторами и определяются из (13) для каждого λ_{mn} . При исследовании характеристического уравнения (14) выявилось, что оно может иметь как одинаковые по абсолютной величине, так и бикомплексные собственные значения, и всегда имеет четный порядок. Особое расположение элементов и наличие упомянутых выше корней

позволяют понизить порядок характеристической матрицы на два:

$$\begin{bmatrix} c_{klmn}^{(3)} - \lambda^2 & d_{klmn}^{(3)} & f_{klmn}^{(3)} \\ f_{klmn}^{(1)} c_{klmn}^{(3)} + f_{klmn}^{(1)} d_{klmn}^{(3)} & -\lambda^2 & e_{klmn}^{(1)} + f_{klmn}^{(1)} f_{klmn}^{(3)} \\ f_{klmn}^{(2)} c_{klmn}^{(3)} + f_{klmn}^{(2)} d_{klmn}^{(3)} & c_{klmn}^{(2)} + f_{klmn}^{(2)} f_{klmn}^{(3)} & -\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

и вычисляют собственные значения, как простые (λ^2)ли как комплексно-сопряженные ($\alpha \pm i\beta$)² Вычисление собственных значений и собственных векторов (15) происходит очень быстро и экономит память компьютера. При этом сходимость итерационного процесса ускоряется, поскольку $|\lambda_2| / |\lambda_1| > \lambda_2^2 / \lambda_1^2$.

После того, как вычислены все собственные значения (15) и соответствующие им собственные векторы, недостающие собственные значения матрицы (14) вычисляются путем извлечения квадратного корня из собственных значений характеристической матрицы, и соответствующие им собственные векторы формируются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} X_{kl}^{(1)}(\lambda_{mn}) = \frac{X_{kl}^{(4)}(\lambda_{mn})}{\lambda_{mn}}, X_{kl}^{(2)}(\lambda_{mn}) = \frac{X_{kl}^{(5)}(\lambda_{mn})}{\lambda_{mn}}, X_{kl}^{(6)}(\lambda_{mn}) = \lambda_{mn} X_{kl}^{(3)}(\lambda_{mn}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

После нахождения всех собственных значений и соответствующих им собственных векторов общее решение однородного дифференциального уравнения (10) можно выразить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = XF(z)C \quad (17)$$

где $[T_1, T_2]^t = [U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, U'_{mn}, V'_{mn}, W'_{mn}]^t$; $C = [C_{mn}^{(1)}, C_{mn}^{(2)}, C_{mn}^{(3)}, C_{mn}^{(4)}, C_{mn}^{(5)}, C_{mn}^{(6)}]^t$;

$$X = \begin{bmatrix} -X_{kl}^{11} & X_{kl}^{11} & \dots & -X_{kl}^{1N} & X_{kl}^{1N} \\ -X_{kl}^{21} & X_{kl}^{21} & \dots & -X_{kl}^{2N} & X_{kl}^{2N} \\ X_{kl}^{31} & X_{kl}^{31} & \dots & X_{kl}^{3N} & X_{kl}^{3N} \\ X_{kl}^{41} & X_{kl}^{41} & \dots & X_{kl}^{4N} & X_{kl}^{4N} \\ X_{kl}^{51} & X_{kl}^{51} & \dots & X_{kl}^{5N} & X_{kl}^{5N} \\ -X_{kl}^{61} & X_{kl}^{61} & \dots & -X_{kl}^{6N} & X_{kl}^{6N} \end{bmatrix} \quad (18)$$

-квадратная матрица, составленная из собственных векторов;

$$F(z) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1, z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2, z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_N, z) \end{bmatrix} \quad (19)$$

– квадратная матрица, вид которой зависит от вида собственных значений характеристической матрицы уравнения (11). Если λ_j — простой корень, то

$$f(\lambda_j, z) = \begin{bmatrix} e^{-\sqrt{\lambda_j} z} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\lambda_j} z} \end{bmatrix}$$

если $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ — комплексно-сопряженный корень, то

$$f(\lambda_j, z) = \begin{bmatrix} e^{-a_j z} \cos b_j z & e^{-a_j z} \sin(-b_j z) & 0 & 0 \\ -e^{-a_j z} \sin(-b_j z) & e^{-a_j z} \cos b_j z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_j z} \cos b_j z & e^{a_j z} \sin(b_j z) \\ 0 & 0 & -e^{a_j z} \sin(b_j z) & e^{a_j z} \cos b_j z \end{bmatrix}$$

$a_j \pm ib_j = \pm \sqrt{\alpha_j \pm i\beta_j}$. Буква t означает транспонирование везде.

Если собственные значения вещественны и по абсолютной величине одинаковы, то каждому из них соответствует один столбец матрицы (18). Если собственные значения бикомплексны, то действительным и мнимым частям соответствует по одному столбцу матрицы (18).

Используем метод вариации постоянных для построения частного решения уравнения (8). Согласно этому методу представим постоянный вектор C как функцию от z , то есть $C(z)$. Подставив (17) в (8), получим (20):

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} X \cdot F(z) \cdot C' = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1(z) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Поскольку $|A_1| \neq 0$, $|X| \neq 0$ и $|F(z)| \neq 0$ при любом значении переменной z ($0 \leq z \leq l$), то выражение (20) можно привести к виду

$$C' = F^{-1}(z) X^{-1} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_1(z) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Находим X^{-1} и A_1^{-1} . Поскольку матрица $F(z)$ является диагональной, а в некоторых случаях и квазидиагональной, структура матрицы $F^{-1}(z)$ также имеет такой вид. Предположим что, $X^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ и интегрируя (21) между 0 и z имеем:

$$C = \int_0^z F^{-1}(q) \begin{bmatrix} \alpha_{12} & A_1^{-1} \\ \alpha_{22} & A_1^{-1} \end{bmatrix} D_1(q) dq + \bar{C} \quad (22)$$

Здесь \bar{C} — вектор произвольных постоянных, определяемый из граничного условия. Для удобства интегрирования выразим (22) следующим образом:

$$C = \bar{C} + A(z) \quad (23)$$

Здесь $A(z)$ имеет следующий вид:

$$A(z) = \left\{ \begin{array}{l} [a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_i]^* \\ \int_0^z \begin{bmatrix} D_1(q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_1(q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D_1(q) \end{bmatrix} * [F^{-1}(q)]^t dq \end{array} \right\} \quad (24)$$

При этом a_k и b_k — k -е строки соответственно матриц $\begin{bmatrix} \alpha_{12} & A_1^{-1} \\ \alpha_{22} & A_1^{-1} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \alpha_{12} & A_1^{-1} \\ \alpha_{22} & A_1^{-1} \end{bmatrix}$. Подставив формулу (23) в (17), получим общее решение неоднородного матричного дифференциального уравнения (8) в следующем виде:

$$[T_1, T_2]^t = X F(z) [\bar{C} + A(z)] \quad (25)$$

Чтобы найти произвольную константу из (25), подставим ее в (9) и получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных констант:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\Gamma_1 + (E - \Gamma_1)B_2 & (E - \Gamma_1)A_2] X F(0) \\ [\Gamma_2 + (E - \Gamma_2)B_2 & (E - \Gamma_2)A_2] X F(l) \end{bmatrix} \bar{C} = \\ & = - \begin{bmatrix} (E - \Gamma_1)[D_2(0)] \\ (E - \Gamma_2)[D_2(l)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\Gamma_1 + (E - \Gamma_1)B_2 & (E - \Gamma_1)A_2] X F(0) A(0) \\ [\Gamma_2 + (E - \Gamma_2)B_2 & (E - \Gamma_2)A_2] X F(l) A(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, решив систему (26), мы находим вектор \bar{C} , и в результате вектор решения $[T1, T2]^T$ определяется в произвольной точке $z (0 \leq z \leq l)$. Подставляя его в формулу (1), находим компоненты перемещения U, V, W в любой точке тела. Тогда компоненты деформации и напряжений можно определить по формулам (4) и (3).

Заключение

Построена схема приведения трехмерных уравнений теории малых упруго-пластических деформаций в перемещения линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с соответствующим граничным условиям по методу Власова – Канторовича. Разработан алгоритм их решения с помощью методов линейной алгебры и метода упругих решений А.А. Ильюшина.

Литература / References

1. Ильюшин А.А. Пластичность. –М: Изд. АН СССР, 1963. -217 с.
2. Биргер И.А. Расчет конструкций с учётом пластичности и ползучести. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.
3. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. –М.: Изд-во МГУ, 1981. -343 с.
4. Қобулов В.Қ. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. – Ташкент: Фан УзССР, 1966. -394 с.
5. Қобулов В.Қ. Алгоритмизация в механике сплошных сред. –Ташкент: Фан УзССР, 1979, -304 с.
6. Михлин С.Г. О рациональном выборе координатных функций в методе Ритца. –ЖВМ и МФ. т.2, 1962, № 3.
7. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. –М.: Наука, 1966. -432 с.
8. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель.– М.: ДМК Пресс, 2012.–768 с.
9. Саттаров А. Программные продукты в математическом моделировании на базе Mat-Lab. Монография. - Ташкент: УМЭД, 2023, 196 с.
10. Фаддеева В.Н. О фундаментальных функциях оператора X^{IV} . Труды ин-та математики им. В.А. Стеклова, т. 28. -М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949, с. 157-159.
11. Саттаров А., Рахимджанов М. Технология построения системы координатных функций в методе Власова -Канторовича. Материалы международной конференции «Математическое моделирование и вычислительный эксперимент». -Т.: -1994.