Призматик жисмни сиқиб бураш мувозанат тенгламасини қўриш, интеграллаш ва сонли таҳлил

Саттаров Ахат[1], Садритдинова Зулфия Исраиловна[2]
[1]Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети
[2]Tashkent International University of Education

Citation: Sattarov A., Sadriddinova Z. Derivation, integration and numerical analysis of the solution to the equilibrium equation under constrained torsion of a prismatic body. Acta Education (2024) 1(2) 22–28. https://doi.org/10.61587/3030-3141-2024-1-2-31-36

Corresponding authors:
Sattarov A. s-akhat@mail.ru

Аннотация. Маскур мақолада эластиклик доирасида (бир ўлчовли назария) призматик жисмни сиқиб (бир томони мустаҳкамланган) бураш масаласи мувозанат тенгламасини қўриш, ҳосил бўлган дифференциал тенгламалар системасини интеграллаш усуллари ва ечимининг сонли натижаларини таҳлили келтирилган. Қаралаётган жисмнинг геометрик ва механик характеристикаларига нисбатан ечимнинг яқинлашиш ҳолати ўрганилган.

***Калит сўзлар**: эластик, пластик, силжиш, деформация, кучланиш, дастурлаш, алгоритмлар, дифференциал тенгламалар, координат функцияси, чегаравий масала, матрица, хос сон, хос вектор, интеграл, дифференциал, система, константа.*

Derivation, integration and numerical analysis of the solution to the equilibrium equation under constrained torsion of a prismatic body

Sattarov Akhat[1], Sadriddinova Zulfiya Israilovna[2]
[1]University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan
[2]Tashkent International University of Education, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. The article presents an analysis of the numerical results of solving the problem of constrained torsion of a prismatic body (one side is reinforced) within the framework of the theory of elasticity (one-dimensional theory), finding the equilibrium equation, and integrating the resulting system of differential equations. The state of convergence of the solution based on the geometric and mechanical characteristics of the object under consideration is investigated.

***Keywords**: elasticity, plasticity, displacement, deformation, stress, programming, algorithms, differential equations, coordinate function, boundary value problem, matrix, eigenvalues, eigenvectors, integral, differential, system, variation of constants.*

Funding source for publication: Tashkent International University of Education.

Кириш

Маълумки эластиклик ҳолатидаги призматик жисмларнинг Власов-Канторович усулига асосан эластик ҳолатда Ляменинг [1] уч ўлчовли тенгламасининг ечими қуйидаги кўринишда ифодаланади

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0(x,y,z)+\sum_{mn} U_{mn}(z)\, f_{mn}^{(1)}(x,y) \\ V &= V_0(x,y,z)+\sum_{mn} V_{mn}(z)\, f_{mn}^{(2)}(x,y) \\ W &= W_0(x,y,z)+\sum_{mn} W_{mn}(z)\, f_{mn}^{(3)}(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

кўринишда қурилади. Бу ерда

U_0, V_0, W_0 – олдиндан аниқланган функциялар бўлиб, улар элементар назария асосида қурилган бўлиши мумкин;

$f_{mn}^{(1)}, f_{mn}^{2}, f_{mn}^{(3)}$ – координат функцияллари бўлиб, чегаравий шартлар асасида олдиндан танлаб олинади;

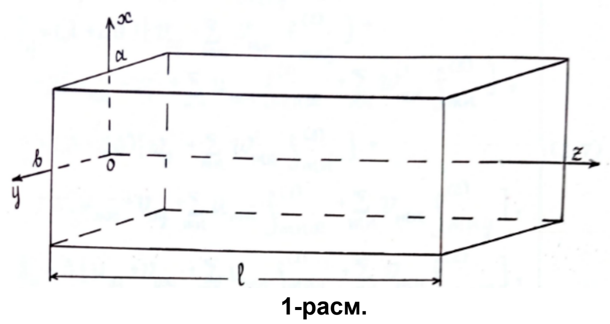
U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} – жисмнинг умумлашган силжишлари бўлиб, номаълум функциялардан иборатдир.

$f_{mn}^{(1)}, f_{mn}^{2}, f_{mn}^{(3)}$ функцияллар тўлиқликлик шартини [2,3,4,5] қаноатлантириши билан бирга, қисман ёки тўлиқ призматик жисмнинг ён томонларига қўйилган чегаравий шартларни қаноатланитириши керак.

Мақолада параллелепипедни сиқиб бураш масаласининг ечимини қуришда (1) даги нолинчи ҳадларни (U_0, V_0, W_0) ҳосил қилиш масаласи қаралади. Бу функцияларни қуриш ечилаётган масалага боғлиқ бўлиб, улар (1) даги ҳадлар сонига ва чекчиз қаторнинг яқинлашишига бевоста тасир этади. Бу функцияларнинг модели қаралаётган масалани қанчалик аниқ акслантирса (1) даги чексиз йиғиндидан олинадиган элементлар сонини камайтириш имкониятини беради. Бу ўз навбатида компьютер вақтини тежайди ва ҳисоб-китобларни қисқа вақт ичида амалга оширишни таминлайди.

Методология

Фараз қилайлик қаралаётган жисмнинг z=0 кесими маҳкамланган. $z = l$ кесимида бураш моменти (J_{2h}) берилган бўлсин (1-расм). Жисмнинг барча ён томонлари ташқи кучлар тасирида бўлмасин. Параллелопипедни сиқиб бураш масаласининг мувозанат дифферециал тенгламасини қуйидагича қўрамиз:



1-расм.

$$\left.\begin{aligned} U_0(x,y,z) &= -\theta(z)y \\ V_0(x,y,z) &= \theta(z)x \\ W_0(x,y,z) &= \nu(z)\varphi(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

бу ерда $\theta(z)$-буралиш бурчаги, $\nu(z)$- нисбий буралиш бурчаги, $\varphi(x,y)$-буралиш функцияси. (2) кўринишдаги ечим параллелопипедни сиқиб бурашда ҳосил бўладиган ва жисмни ўқи бўйича йўналган нормал кучланишни ҳисобга олади [1]. Бу ҳолатда деплонация нисбий бурилиш бурчагининг стержен ўқи бўйича ўзгаришига боғлиқ равишда танланади.

Натижалар ва муҳокама

$\theta(z)$, $\nu(z)$ ва $\varphi(x,y)$ фунциялар вариацияларининг боғлиқмаслигини этиборга олиб мувозанат тенгламасини қуришнинг умумий схемага асосан қуйидаги дифференциал тенгламалар системасини ва унга мос чегаравий шартларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{gathered} \theta'' + a_1\nu' = 0 \\ \nu'' - b_1\theta' - b_2\nu = 0 \\ \mathrm{z} = 0 \ \ \mathrm{da} \ \theta(0) = 0, \quad \nu(0) = 0 \\ z = l \, da \, \nu'(l) = 0, \ \ \theta'(l) + a_1\nu'(l) - \beta_H = 0 \end{gathered}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{gathered} \nabla^2\varphi + \bar{\omega}_1\varphi = 0 \\ \left.\varphi_x - \tilde{\omega}_1 y\right|_{x=\pm a} = 0 \\ \left.\varphi_y + \tilde{\omega}_1 x\right|_{y=\pm b} = 0 \end{gathered}\right\} \qquad (4)$$

(3)-(4) да қуйидаги белгилашлар олинган:

$$J_p = \iint_F \left(x^2 + y^2\right) dF; \ J_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2G}{G} \iint_F \varphi^2 dF;$$

$$J_k = \iint_F (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dF;$$

$$\begin{gathered} J_{\mathrm{i}} = \iint_F (x\varphi_y - y\varphi_x) dF; J_{2H} = \\ = \frac{1}{G} \iint_F \left(xP_{yz} - yP_{xz}\right) dF; \\ \omega_2 = \frac{\lambda + 2G}{G} \int_0^l \left(\nu'\right)^2 dz, \omega_3 = \\ = -\int_0^l \nu^2 dz \ , \omega_5 = \int_0^l \nu\theta' dz \end{gathered} \qquad (5)$$

$$a_1 = {J_{\text{i}}}\big/{J_p}; b_1 = {J_{\text{i}}}\big/{J_{\varphi\varphi}}; b_2 = {J_k}\big/{J_{\varphi\varphi}} \quad \beta_H = J_{2H} / J_p; \quad \bar{\omega}_1 = {\omega_2}\big/{\omega_3}, \tilde{\omega}_1 = -{\omega_5}\big/{\omega_3}$$

(3) ва (4) дифференциал тенгламалар системасини интеграллашни кўриб чиқамиз. Системани ечимини қуришда кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланилади. Унга асосан, нолинчи яқинлашишда $\bar{\omega}_1 = 0$ ва $\tilde{\omega}_1 = 1$ кўринишда танлаймиз. Бу ҳолда буралиш фукцияси φ(x,y) Сен-Венан ечими билан устма уст тушади:

$$\varphi(x,y) = xy + \sum_{i=1,2,3,..} \frac{4(-1)^i}{aP_{1i}^3} \frac{Sh(P_{1i}y)}{Ch(P_{1i}b)} Sin(P_{1i}x); \quad P_{1i} = (2i-1)\pi/(2a) \tag{6}$$

$\theta(z)$ ва $v(z)$ функциялар (3) дан топилади ва улар матрицали қуйидаги кўринишга эга:

$$R(z)=F(z)\,C, \tag{7}$$

Бу ерда

$$R(z) = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \\ v \\ v' \end{bmatrix}, \; F(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1+z & -{a_1 e^{rz}}\big/{r} & {a_1 e^{-rz}}\big/{r} \\ 0 & 1 & -a_1 e^{rz} & a_1 e^{-rz} \\ 0 & -{b_1}\big/{b_2} & e^{rz} & e^{-rz} \\ 0 & 0 & re^{rz} & -re^{-rz} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, r = \sqrt{b_2 - a_1 b_1}$$

(7) даги c_1, c_2, c_3, c_4 ўзгармаслар чегаравий шартлардан топилади ва улар қўйидаги кўринишда бўлади:

$$c_1^0 = -\,c_2^0(1 + a_1 b_1 \text{th}(\text{r*l})/(\text{r}b_2); \; c_2^0 = \beta_H b_2 / r^2;$$

$$c_3^0 = c_2^0 \frac{b_1}{b_2} / \left(1 + e^{2rl}\right); c_4^0 = c_2^0 \frac{b_1}{b_2} e^{2rl} / \left(1 + e^{2rl}\right)$$

Итерациянинг кейинги қадамларида буралиш функцияси қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$\varphi(x,y) = \tilde{\omega}_1 xy + \sum_{i=1,2,3,\cdots} (q_{1i} y + q_{2i} shP_{2i} y) SinP_{1i} x \tag{8}$$

Бу ерда

$$\left.\begin{aligned} P_{2i}^2 &= P_{1i}^2 - \bar{\omega}_1 \\ q_{1i} &= \frac{-2\bar{\omega}_1 \tilde{\omega}_1 (-1)^i}{aP_{1i}^2 P_{2i}^2} \\ q_{2i} &= \frac{2\tilde{\omega}_1 (-1)^i \left(2P_{1i}^2 + \bar{\omega}_1\right)}{aP_{1i}^2 P_{2i}^3 chP_{2i} b} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Итерациянинг кейинги қадамида $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ларнинг топилган қийматидан фойдаланиб (9) формула бўйича P_{2i}^2, q_{1i}, q_{2i} коэффициентлар ҳисобланади. Бу қийматлар Сен-Венан функциясининг (8) кўринишини аниқлайди. Бу жараён маълум аниқликка эришилгунча давом этади, яъни (8) ёрдамида ($J_{\varphi\varphi}, J_k, J_{\text{i}}$ –(5)) интеграллар ҳисобланади. Улар ёрдамида $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ларнинг янги қийматланари аниқланади ва ҳ.з.

MatLab тилининг визуал дастурлаш имконияти GUI (Graphic User Interface) фойдаланувчига қулай графикли интерфейс яратади ва унинг ёрдамида мураккаб лойиҳалар (проектлар) қуриш мумкин. Жумладан юқорда келтирилга дифференциал тенгламалар системани кетма-кет яқинлашиш усулида ечишнинг лойиҳасини яратиш, олинган сонли натижаларни визиул таҳлил қилиш имкониятини яратади.

(2) дан фойдаланиб деформация ва кучланиш компоненталарини топамиз. Унга кўра:

$$\left.\begin{aligned} &e_{xx}=U_{0x}=0;\;\; e_{xy}=U_{0y}+V_{0x}=0 \\ &e_{yy}=V_{0y}=0;\; e_{yz}=V_0'+W_{0y}=\theta' x+\nu\varphi_y \\ &e_{zz}=W_0'=\nu'\varphi;\; e_{zx}=W_{0x}+U_0'=-\theta' y+\nu\varphi_x \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

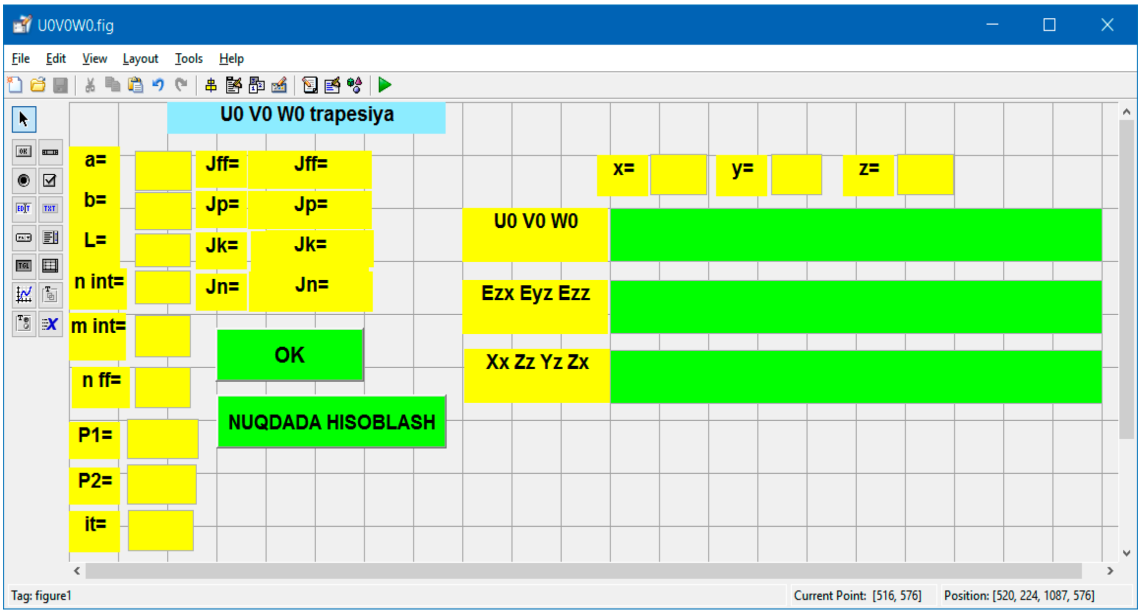
$$X_x=Y_y=\lambda e_{zz};Z_z=\left(\lambda+2G\right)e_{zz};X_y=Y_x=e_{xy}=0;Y_z=Ge_{yz};Z_x=Ge_{zx} \qquad (11)$$

Бу ерда λ ва G Ламе константалари.

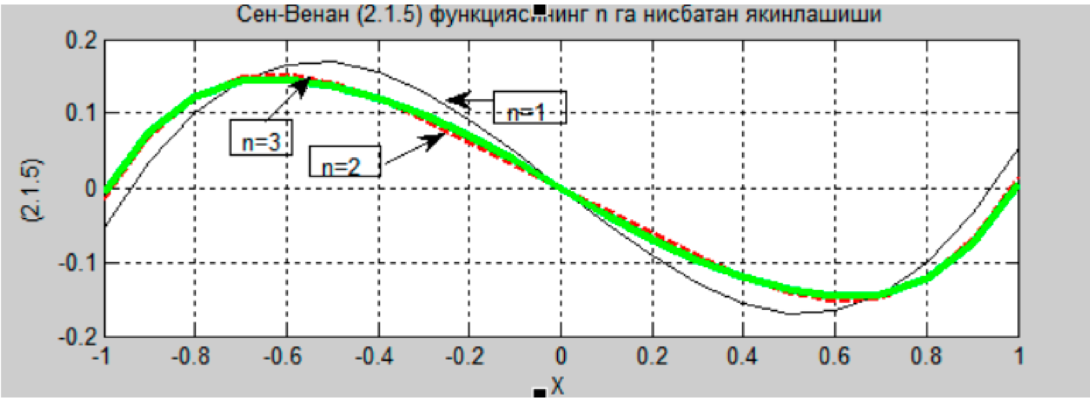
Барча катталикларни ҳисоблаш учун MatLab дастурининг **GUI** асосида қуйидаги лойиҳани ҳосил қиламиз (2-расм). Бу ерда a, b, L – берилган жисмнинг ўлчовлари; n- буралиш функциясидаги (6) суммадан олинган элементлар сони; $P_{xz}\Big|_{x=0}=-yP1;P_{yz}\Big|_{y=0}=xP2$ - ташқи кучларнинг компоненталари; *Jff, Jp, Jk, Jn* лар мос равишда $J_{\varphi\varphi},J_p,J_k,J_n$ интегралларнинг қиймати. “n int” – x бўйича трапеция усулидаги бўлинишлар сони; “*m* int” – y бўйича трапеция усулидаги бўлинишлар сони; “*n ff*” - $\varphi(x,y)$ функциясидаги элеменлар сони, it-(9) формуладаги катталикларни аниқлаш учун олинадиган итерациялар сони. Лойиҳа икки қисмдан иборат бўлиб, унинг биринчи қисми OK тугмасини босиш билан амалга оширилади ва юқоридаги интеграллар трапеция формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланади. Иккинчи қисми **NUQTADA YISOBLASH** тугмасини босиш билан аниқланади. Унда асосан $\varphi(x,y)$, $\theta(z)$ ва $\nu(z)$ функцияларнинг охирги кўринишини аниқланади. Булар ёрдамида силжий, деформация ва кучланиш компоненталарининг қийматлари берилган *x, y, z* нуқтада аниқланади. Лойиҳага озгина ўзгартириш киритиб юқоридаги компоненталарнинг графигини ҳам чизиш мумкин.

Яратилган алгоритмнинг тўғри ишлашини текшириш ва олинган натижаларнинг ишончлилигини аниқлаш мақсадида бир қатор тахлиллар амалга оширилди. Ҳосил қилинган дастурий таъминот асосида жисмнинг кучланганлик – деформацион ҳолатини ўрганиш мақсадида унинг қуйидаги геометрик ва физик хусусиялари асосида (бир ўлчовли назария) буралиш масаласи таҳлил қилинди: (*a, b, L*– сантиметрда берилади; E=2*10^6 кг/см^2 ; μ=0,3 ; *P1, P2* - кг/см^2).

3-расмда Сен–Венан (6) фунциясининг ҳадлар сони n га нисбатан қийматларининг графиги келтирилган. Бу расмдан кўриниб турибдики кейинги ҳисоблар учун $n=2$ олиш етарли ($n=1$–қора, $n=2$–қизил ва $n=3$– яшил). 1-жадвалда *φ(x,y)* функция ва унинг ҳосилалари иштирок этган интегралларнинг (5) қийматлари n га тисбатан тахлил қилинган. Бунинг учун лойиҳада n нинг қийматини ўзгартириб OK тугмасини босиш етарли. 1-жадвалдан кўриниб турибдики кейинги ҳисоб китоблар учун n нинг қийматини икки ёки уч танлаш кифоя.



2-расм.



3-расм (*a*=1, *b*=1, *L*=4, *y*=1, -*a*≤*x*≤*a*)

1-жадвал

n Интеграллар	$\varphi(x,y)$ функциясидаги элементлар сони (a=1, b=1)				
	1	2	3	4	5
$J_{\varphi\varphi}$	0.03754	0.030566	0.03018	0.030125	0.030113
J_k	0.47945	0.42833	0.42099	0.419	0.41825
J_i	-0.44087	-0.4222	-0.41906	-0.41807	-0.41782

Сен-Венан функциясига боғлиқ барча интеграллар $J_{\varphi\varphi}, J_k, J_i$ –(5) ҳисоблангандан кейин шу гуруҳга кирувчи ва z га боғлиқ ω_2, ω_3, ω_5 (5) интегралларни ҳисоблаймиз ва улар ёрдамида $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ларнинг қиймати топилади. Итерациянинг кейинги қадамида $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ларнинг топилган қийматидан фойдаланиб (9) формула бўйича P_{2i}^2, q_{1i}, q_{2i} коэффициентлар ҳисобланади. Бу қийматлар Сен-Венан функциясининг (8) кўринишини аниқлайди. Бу жараён маълум аниқликка эришилгунча давом этади, яъни (5) ёрдамида $J_{\varphi\varphi}, J_k, J_i$ интеграллар ҳисобланади. Улар ёрдамида $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ларнинг янги қийматланари аниқладаи ва ҳ.з.

2-жадвалда n=2 да (8) даги ҳадлар сонига нисбатан $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ лани топиш учун қанча итерация қилиш лозимлиги таҳлил қилинган. Жадвалдан кўриниб турибдики $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ларни 4-5 хона аниқликда ҳисоблаш учун кўпи билан 4-5 та итерация қилиш етарли экан.

2-жадвал

a=1;b=1;L=1;n=2;		
Итерация -№	$\bar{\omega}_1$	r
0	0	3.435929975329609
1	-10.442866788342187	3.944184109278434
2	-11.045630422326512	3.971335456839694
3	-11.079773935760535	3.972865335872468
4	-11.081703172711858	3.972951753761411
5	-11.081812166058358	3.972956635906427
6	-11.081818323649394	3.972956911723480
7	-11.081818671523013	3.972956927305787
8	-11.081818691176158	3.972956928186110
9	-11.081818692286467	3.972956928235840
10	-11.081818692349190	3.972956928238652

3-жадвалда интегралларнинг қийматлари трапеция усулидаги оралиқни бўлинишлар сонига нисбатан таҳлил қилинган.

3-жадвал

Интеграллар	φ(x,y) функциясидаги элементлар сони (n=2)				
	n int=10 m int=10	n int=20 m int=20	n int=30 m int=30	n int=40 m int=40	n int=50 m int=50
$J_{\varphi\varphi}$	0.039969	0.033028	0.031669	0.031188	0.030965
J_k	0.48176	0.44167	0.43425	0.43166	0.43046
J_i	-0.42309	-0.42225	-0.42221	-0.42222	-0.4222

Бу жадвалдан кўриниб турибдики интегралларни ҳисоблашда ўртача 40 ёки 50 та бўлиниш нуқталарини олиш етарли экан.

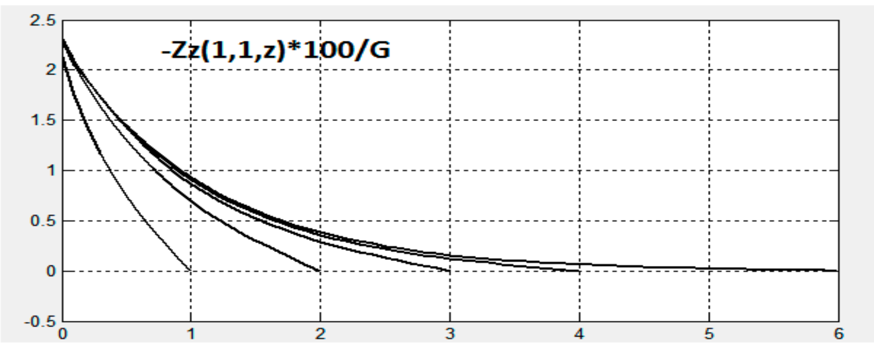
Эластиклик ҳолатида натижаларнинг сонли яқинлашиши (8) да олинган элементлар сонига ва $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ва r ларни аниқлан учун олинадиган итерациялар сонига боғлиқлигини юқорида кўрдик. Кейинги таҳлилларда кучланиш компоненталарининг яқинлашиши (8) дан олинган ҳадлар сонини фиксирлаб (масалан, n=3), $\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ва r ларни аниқлаш учун олинадиган итерациялар сонига нисбатан таҳлили келтирилган.

4-жадвал.

Кучланиш компоненталари	a=2, b=1, L=2, P_1 , P_2 =4000, E=2*10^6 кг/см^2 ; μ=0, 3				
	$\bar{\omega}_1, \tilde{\omega}_1$ ва r ларни аниқлашдаги итерациялар сони				
	0	1	2	3	4
$\bar{\omega}_1$,	0	-2.26802	-2.32955	-2.3317	-2.33177
$\tilde{\omega}_1$	1	1.49256	1.51061	1.51935	1.52781
r	0.853689	1.0817	1.08847	1.08871	1.08872
-Zz(1,1,0)10/G	0.207209	0.229437	0.229661	0.229669	0.229669
-Xz(0,1,2)10/G	0.134898	0.13771	0.137601	0.137597	0.137597
Yz(2,0,L2)10/G	0.127446	0.156048	0.156544	0.156561	0.156562

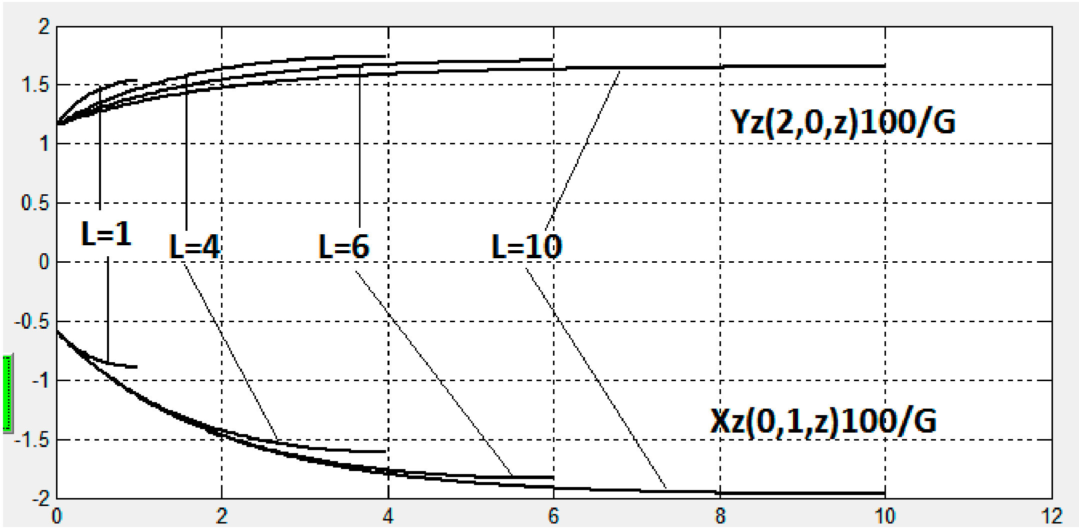
4-жадвалдан кўриниб турибдики кучланиш компоненталарида уч хона аниқлик олиш учун учта ёки тўрта итерацияни олиниши етарли. Итерациялар сонининг ошиши бешинчи ёки олтинчи рақамларга таъсир этади ва бу замонавий компьютерлардан жуда ҳам кам вақт талаб этади (секундлар маъносида).

Жисмнинг маҳкамланган томонида Zz нинг қиймати жисмнинг узунлиги унинг кўндаланг кесмининг узун томонига тенг бўлгунча ўсиб боради ва кейин деярли бир хил бўлиб, жисм узунлигининг ортишига боғлиқ бўлмайди (4-расм). Бу жараён μ=0, 3 ва жисм кўндаланг кесими квадратга яқин бўлганда тезроқ кечади. μ=0, 45 учун учун бу жараён секинроқ кечади (2.26-2.28-расм).



4-расм. a=2; b=1; L=1,2,3,4,6; P1 , P2 =4000; μ=0, 3

Кучланишнинг уринма компоненталарининг (Xz, Yz) қийматлари жисмнинг бўш томонига яқинлашган сари ўсиб боради. Бу ўсиш жисмнинг бўйи узунлашган сари яна ҳам ортади (5-расм).



5-расм. a=2; b=1; L=1, 4, 6, 10; P1 , P2 =4000; μ=0,45

Хулоса

Дастурлаш тили MatLabнинг визуал имконияти GUIдан фойдаланиб қулай графикли интерфейс яратилди ва унинг ёрдамида мураккаб масалларни еиш учун лойиҳа (проект) яратилди. Яратилган лойиҳа фойдаланувчи учун қўлай ва кенг имкониятларга эга бўлиб, унинг ёрдамида юқорида келтирилган уч ўлчовли буралиш масаласи ечилди. Лойиҳа ёрдамида олинган натижаларнинг сонли ва график таҳлили амалга оширилди. Олинган натижалар жисмда кечадиган физик жараёнларнинг тўғри аксլантирилиши кўрсатилди. Бу ўз навбатида танланган сонли методларнинг тўғри танланганлигини ва яратилган алгоритм натижасини ишончлилигини кўрсатади

Адабиётлар / References

1. Безухов Н.Н. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.-М.: Высшая школа, 1968.-512 с.

2. Михлин С.Г. О рациональном выборе координатных функций в методе Ритца. –ЖВМ и МФ. т.2, 1962, № 3.

3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. –М.: Наука, 1966. -432 с.

4. Саттаров А., Рахимджанов М. Технология построения системы координатных функций в методе Власова -Канторовича. Материалы международной конференции «Математическое моделирование и вычислительный эксперимент» .-Т.:-1994.

5. Фаддеева В.Н. О фундаментальных функциях оператора XIY. Труды ин-та математики им. В.А. Стеклова, т. 28. -М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949, с. 157-159.